De axiomate ad theoriam parallelarum stabiliendam pertinente,

disputatio,

quam

Venia Ampl. Facult. Philos.

publico examini,

Præside

Mag. CAROL. JOH. Ds. HILL,

Math. Prof. Reg. et Ord.

laurean ambiens submittit

CAROL. AD. TH. LINDWALL,
Philos. Cand. Smolandus.

In Lyceo Carol. die XV Jun. MDCCCXLIV.

P. III.

Lundæ,
typis Berlingianis.
MDCCCXLIV.

et Schmidt, Krausius aliique lineæ vel anguli cujusdam motu utuntur. Alii maximi vel minimi notionem adhibuerunt, ut olim nosmet ipsi et Olivier, cui nostram demonstrationem communicavimus. Alii infiniti considerationem admittunt: quorum plerique, utut Schulze et Cel. Crelle, Bertrand et Cel. Lacroix, angulos rationem spatiorum infinitorum, quæ utrimque ipsorum cruribus limitantur, tenere credunt. Alii ex Philosophis principium rationis sufficientis mutuantur; id quod et antiquitus Ptolomæus et olim nosmetipsi et nuperrime *) Lehman fecerunt. Quibus principium exhaustionis addidimus.

Quod vero ad motus regulas attinet, earum pleræque ejusmodi sunt, ut demonstrationibus geometricis stabiliantur, quare ipsæ ægrius in Geometriam admittuntur, cui motus satis alienus videatur, excepto intellectuali illo, quo triangulum super triangulum i Prop. IV et similibus ponitur. Quod ad infinitum attinet, hoc necessario in elementa intrudi videtur, cum ejus adminiculo Euclides parallelas definiverit, attamen modo, quo nonnulli eo utuntur, vix adhibendum videtur; ægre enim spatiorum infinitorum et angulorum ratio demonstratur.

Quod ad principium illud Philosophicum attinet, Ptolomæus, ut Proclus refert, ita ratiocinatus est: Linea recta duas inter se parallelas secante, angulorum interiorum, quos utrimque constituit, nullum par alterum esse superaturum, ratio deest sufficiens: par igitur angulorum, quod istius lineæ uni latere adjacet, æquabitur alteri pari, quod alterum latus tangit. Omnes vero hi IV anguli cum IV rectis æquantur, ideoque utrumque istorum parium, seu anguli qui audiunt interiores, duos rectos æquabunt.

*) v. not. seq.

Lehman vero ejusdem principii ope hoc theorema demomstrandum prævie adoritur: *Data linea quacunque Trianguloque quodam, alterum etiam datur Triangulum, cujus unum latus isti lineæ, angulique huic adjacentes angulis duobus Trianguli dati, uterque utrique æquales erunt.* At ipsius demonstratio nobis nequidem æque ac Ptolomæi sufficit. Sicuti enim Archimedi contigit in notissima sua æquibibrii bilanc isdemonstratione, rerum, ni valde fallor, aliqua similitudo atque æqualitas adsit, quominus principium rationis sufficientis rite adhibeatur, quin, imo aliqua causæ et effectus ratio; id quod horum neutri, et quidem recentiori minus ac antiquo illi, contigit.

Nos vero olim in hujusmodi demonstrationis genere versati ita argumentati fuimus:

Datis duobus lineis parallelis, ductaque linea recta harum alteri normalis, utrimque eadem erit figuræ ratio. Parallelarum enim altera utrimque quousque libet, quin imo in infinitum producta, alteram, quæ ductæ illi normalis est, nusquam, neque dextrorsum neque sinistrorsum, secabit. Nulla igitur adest causa, cur hæc ad ipsam normaliter ductam magis ab una parte quam ab altera inclinet; æqualiter igitur illa ad normalem hujus ab una parte quam ab altera necessario inclinet: ideoque et *ea linea, quæ ad unam parallellarum perpendicularis est, etiam normaliter secat alteram;* æquales enim illi inclinationis anguli contigui sunt, ideoque uterque ex I: 13 rectus. Id quod et fusius demonstrari potest, figuræ partem, quæ normali isti jam ab initio ductæ dextrorsum est, convertendo superque sinistram imponendo: etenim linea normalis communis est et anguli recti æquales ideoque sibi congrui; tum vero et alterius parallelæ partes coincident, cum caussa sufficiens desit, cur altera ad alteram

magis inferne quam superne cadat. Ergo anguli jam congrui æquales erunt, modo vero contigui erant, ideoque ex definitione uterque rectus erit. Hac vero propositione ita (vel etiam aliter, si calles) stabilita, via omnino plana et tuta ad reliquos processimus, demonstrantes Prop. XXIX Wolfii fere in modum.

Cum vero principium rationis sufficientis Geometriæ alienum nobis nonnullisque aliis videbatur, ad demonstrationem ejusdem propositionis, *alteram parallelarum normalem esse eidem lineæ, cui altera perpendiculariter insistit,* viam duodecim abhinc annis *) stravimus, demonstrando

1) in altero crure anguli acuti punctum tam longinquum sumi posse, ut perpendicularis, quæ inde in alterum ducitur, ab hac abscindat partem (subnormalem) data quacumque majorem.

2) lineas, quarum una normaliter altera vero oblique eidem insistit, tandem alicubi coire.

3) Lineam alteri parallelarum normalem, etiam alteri normalem esse, (indirecte ex præc.).

4) Per idem punctum plures eidem parallelas lineas duci non posse (ut Cor. Præc.)

5) angulos parallelarum alternos æquales esse.

Primæ vero harum propositionum, soliusque dubiæ, demonstrationem inde petimus, quod maxima quædam subnormalium haud detur, cum in obliqua illa linea puncta magis magisque remota, majores majoresque subnormales subministrantia, capi possint.

---

*) Hoc jam quindecim fere abhinc annis scripsimus, quare nullius *recentioris* conatus mentio est facta; litteras enim parallelarum postmodum deseruimus.

Neutram vero harum demonstrationum majoris æstimamus, quamquam elementis satis accommodari possint. Nullum igitur principiorum hucusque adhibitorum singularem fructum in axiomate Euclidæo demonstrando polliceri videtur; — Sed vel aliud adhibendum, vel alia via ingrediendum est. — Quisnam vero locus huic axiomati in systemate tribuendus sit, dispiciamus, deindeque ipsius demonstrationes tentemus varias, et quidem per præcipua hucusque in usum vocata principia procedentes. Deinde vero parallelarum theoriam præcipuas ingredientes vias stabilire conemur.

De Theoria Parallelarum Stabilienda

et primo quidem de ipso axiomate dubio.

Euclidæam propositionem, lineas, quæ cum secante angulos internos duobus rectis minores constituunt, alicubi concurrere, pleræque elementorum editiones ut axioma, modo XI, modo XII, modo XIII, exhibent; certe quidem, si axioma sit, ultimo loco ponendam censemus, quamquam plurimi editores, axioma, duas rectas spatium non comprehendere, isti postponant. Scheibel vero, auctoritate plurium recensionum, maxime latinarum (anonymi cujusdam, Capellæ, Boethii etc.) et nonnullorum codicum (teste Gregorio) et editionum (Ratdolti ex Arabica ab Adhelardo translatæ, Zamberti) antiquiorum inter postulata istam referendam censet. Sed iidem et alterum modo enuntiatum una cum XI (rectos angulos esse æquales), quæ genuina sunt axiomata, inter postulata enumerant *). Jacobi vero multum in

*) Aliter res se haberet, si per Axiomata κοινάς ἔννοιας notiones Geometriæ et Arithmeticæ communes intelligendum esset, sicuti Schreibel censet.

demonstrando, ipsam verum constituere theorema, est occupatus; quod etiam plerique censent. Si vero de loco, quem forsitan primitus in elementis tenuerit hæc propositio, quæris, is ex modo, quo Euclides alias procedit, duplex tantum fuisse videtur. Vel enim illa enuntiatio ut convertens seu, si placet, conversa prop. XVII proposita, (contendens inversim ex linea data et duobus angulis adjacentibus acutis triangulum fieri posse), vel ut problema (ex data linea et duobus angulis duobus rectis minoribus triangulum constituere) sit proposita. Si prius, sicuti quæque conversa, indirecte demonstranda fuisset, sed huic fini deerat propositio interponenda, "si lineæ non concurrunt ideoque parallelæ sunt, angulos internos duobus rectis minores haudquaquam esse." Maxime igitur probabile nobis videtur, ipsam primitus problema constituisse, Euclidemque, cum conditioni ex Pr. 17 patenti satisfactum fuerit, crura angulorum ad datam lineam per Pr. 23 constitutorum ex post. 2. producenda, donec concurrant triangulumque quæsitum delineatum fuerit, tantum præscripsisse, minime in hoc concursu demonstrando occupatus; sicuti ipse in Pr. 22 explicanda, conditione ex Pr. 20 mutuata contentus, in demonstranda circulorum problemati necessariorum intersectione minime moratur. Cum vero censores vel sceptici de illo concursu multum postmodum sane dubitaverint, præterea que forsan monuerint, omnibus ex pr. 17 petendis conditionibus haud satisfactum esse, (duo enim quivis anguli quomodocunque sumti duobus rectis minores sint), cum tertius angulus adhuc haud constet; verisimile est vel ipsum, vel potius suos editores, qui plures fuerunt, hanc propositionem, utut indemonstratam, modo inter postulata, modo inter axiomata retulisse. — Quidquid sit, et tametsi, sicuti plerique, Euclidem ut primum præcipuumque Geometriæ doctorem maxime veneramur, suamque di-

disciplinam aliis diligenter ediscendam commendamus, tamen hac parte mendum quoddam elementis inesse, inifitias haud ibimus. Scheibelio tamen concedimus, hanc lacunam, si aliquo modo succedat, vix tam pulchre expleri posse, ut quisque censor aliena maleque interposita statim haud agnoscat. Quin imo si demonstrationem absque ullo axiomate concesso sinceram exigis, Euclides recto tramite egressus fuisse haud videtur, sed suus ordo in theoria parallelarum et Trianguli explicanda potius invertendus videtur, ut primo Pr. 32 deindeque Pr. 29 et axioma XII demonstretur.

Plerique etiam ex suis aliorumque frustra tentatis conatibus demonstrationem neque hoc neque illo tramite vix successurum censent, nisi aliud axioma in subsidium vocatum fuerit, vel etiam, ut J. Hoffmann vult, aliquid ex intuitu sensuali (sinnliche Anschauung) mutuandum, qui vero per se indemonstrabilis est. Sed præterea Geometria sensibus nihil debet, sed tantum intuitui intellectuali; ipsa enim ex intellectus et rationis legibus demonstrat, rem (vel figuram quamvis utcunque definitam) ita necessario animadverti debere et intelligi sensu interno, nec aliter, vel ita sicuti sensibus externis forte videatur. Numne igitur hoc idem in parallelis haud succedat? Ex plurimorum frustra susceptis conatibus, vel insolitis argumentandi generibus demonstrationem nullam genuinam dari, ideoque in explicatione Euclidæa susbsistendum esse, plerique censerunt. Re autem penitius pensitata, demonstrationum diversa genera perfici posse nobis visum est, quare in unoquoque genere unum alterumue theoriæ conamen proponere liceat. Quamquam vero pleræque theoriæ aliquo laborent defectu, vel scientiæ conditionibus haud satisfaciant, et plerique auctores ne lapidem quidem ad hujus theoriæ arcem exstruen-